Carpeta de Matemática 2

Nueva edición ampliada y actualizada

CUADERNILLO 1

Nueva carpeta de Matemática V

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Mónica Real - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

1. Los números reales y los números complejos 3
Revisión inicial 4
Los números reales 5
Adición y sustracción de radicales 6
Multiplicación y división de radicales 7
Racionalización de denominadores 8
Racionalización de numeradores y de denominadores 9
Ampliación del campo numérico 10
Los números complejos 11
El conjugado y el opuesto de un número complejo 12
Operaciones con números complejos 13
Forma binómico y forma polar de un número complejo 14
Ecuaciones en $\mathbb{C}$ 15
Ecuaciones cuadráticas en $\mathbb{C}$ 15
Representación gráfica en el conjunto de números complejos 16
En el mundo real 17
Los números irracionales y el círculo 17
Los relojes y los números complejos 18
Más actividades 19
Autoevaluación 22

AIQUE

Este CUADERNILLO 1 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática V.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Gustavo Zorzoli

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Mercedes Seara

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Constanza Di Gregorio - Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Constanza Di Gregorio - Silvana López

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0077-0
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

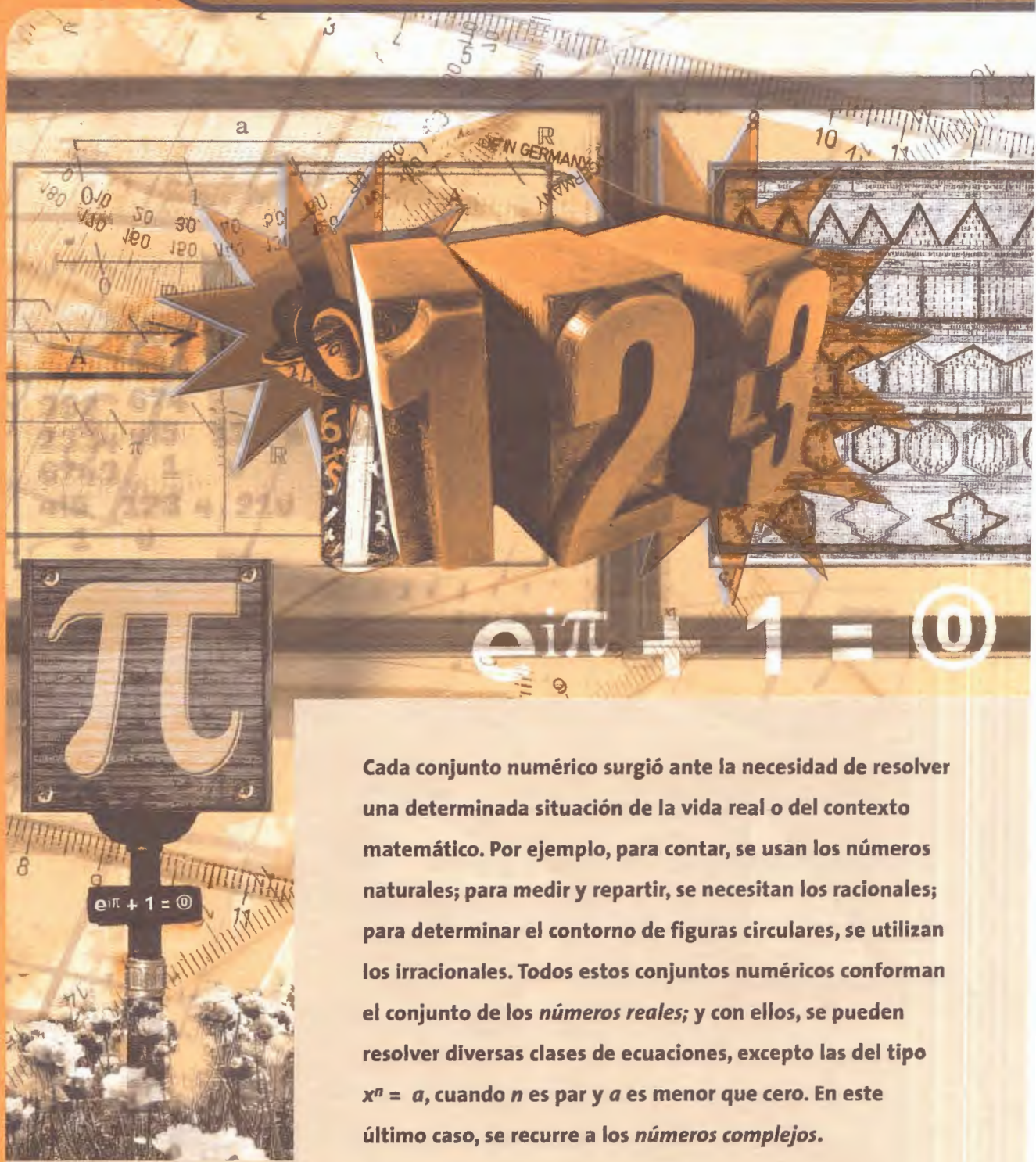
Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática V / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Mónica Real ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
160 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0077-0

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Real, Mónica III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Este ejemplar se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica, Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

1 LOS NÚMEROS REALES Y LOS NÚMEROS COMPLEJOS



Cada conjunto numérico surgió ante la necesidad de resolver una determinada situación de la vida real o del contexto matemático. Por ejemplo, para contar, se usan los números naturales; para medir y repartir, se necesitan los racionales; para determinar el contorno de figuras circulares, se utilizan los irracionales. Todos estos conjuntos numéricos conforman el conjunto de los *números reales;* y con ellos, se pueden resolver diversas clases de ecuaciones, excepto las del tipo $x^n = a$, cuando n es par y a es menor que cero. En este último caso, se recurre a los *números complejos*.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

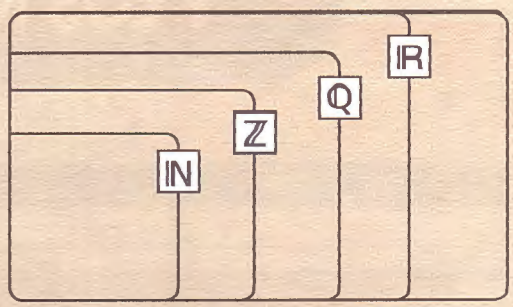
1 Ubiquen los siguientes números en el diagrama.

$\frac{2}{3}$; -3 ; $\sqrt{2}$; 0 ; $\sqrt{9}$; $2{,}5$;

7 ; π ; -25 ; $-\frac{1}{5}$; ϕ ; $\sqrt[3]{-125}$;

$-\sqrt{3}$; $1+\sqrt[6]{-1}$; $2{,}\widehat{3}$; $3{,}\widehat{9}$

(Recuerden que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el número de oro).



2 Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y expliquen por qué.

a) Todos los números naturales son enteros.

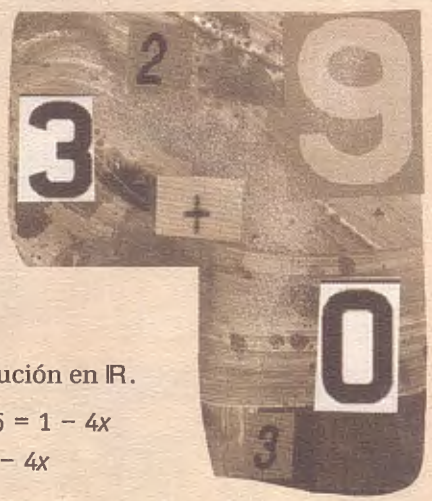
b) Todos los números enteros son naturales.

c) Algunos números racionales son enteros.

d) Algunos números naturales son irracionales.

e) El cuadrado de un número racional puede ser irracional.

f) El cuadrado de un número irracional puede ser racional.



3 Indiquen cuáles de las siguientes ecuaciones no tienen solución en $\mathbb{R}$.

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $6x^2 - 216 = 0$

c) $3x^4 + 8 = -40$

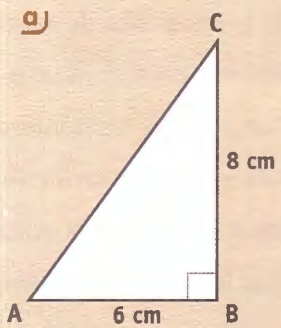
d) $(2x - 1)^2 + 36 = 1 - 4x$

e) $(x - 2)^2 = 29 - 4x$

f) $\frac{x^2 + 1}{4} = -6$

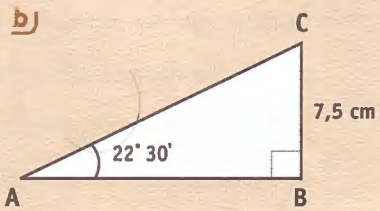
4 Completen.

a)



$\overline{AC}$ = ...

b)



$sen\ 22°\ 30' = \frac{.....}{\overline{AC}}$

$\overline{AC}$ = ...

$\overline{AB}$ = ...

c)

$cos\ 31° = \frac{.....}{11\ cm}$

$\overline{BC}$ = ...

$\overline{BC}$ = ...

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los números reales

5 Agrupen las potencias que tengan la misma base y apliquen las propiedades necesarias para obtener la expresión más sencilla:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{9^2}$

b) $25^2 \cdot \left(\frac{5}{25}\right) : 125$

c) $\sqrt{3^3 \cdot 3^5} \cdot \left(9^{-1} \cdot 2^7\right)^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[3]{(9+2)^2} \cdot \sqrt[3]{(11 \cdot 2^6)}$

Para leer y recordar

- **En el conjunto de los números reales, las propiedades de la potenciación y de la radicación permiten escribir expresiones equivalentes a otras de manera dada, aunque estas son válidas sólo en los casos en que las operaciones sean posibles.**

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = (x^n)^m = x^{m \cdot n}$
- $x^1 = x$
- $x^m : x^n = x^{m-n}$
- $x^0 = 1 \quad x \neq 0$
- $x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n} \quad x \neq 0$
- $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
- $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$
- $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x : y} = \sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{y}$
- $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ *si n es impar*
  $\sqrt[n]{x^n} = x$ *si n es par*

- **Además, para todo número real a, si $a \geq 0$:**

$|x| = a \iff x = a \vee x = -a$ $\quad S = \{-a; a\}$

$|x| \leq a \iff x \geq -a \wedge x \leq a$ $\quad S = [-a; a]$

$|x| \geq a \iff x \leq -a \vee x \geq a$ $\quad S = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$

6 Representen en una recta numérica la solución de las siguientes ecuaciones e inecuaciones en el conjunto de los números reales:

a) $|x| = 5$

b) $|x| \leq 5$

c) $x^2 = 9$

d) $x^2 > 9$

e) $(x+1)^2 \geq 16$

f) $\frac{1}{x^2} \geq 25$

7 Escriban una inecuación del tipo $|x| < a$, $|x| \leq a$, $|x| > a$ o $|x| \geq a$ cuyo conjunto solución sea en cada caso el representado a continuación:

a)

b)

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Adición y sustracción de radicales

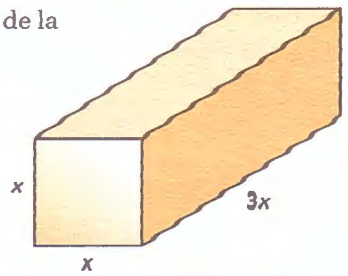
8 El área de una de las dos caras cuadradas de un prisma como el de la figura es de 2 cm^2.

a) Calculen la medida de cada arista.

.....

b) Calculen la suma de todas las aristas.

.....



Para observar

- **Dos o más radicales pueden sumarse o restarse siempre que sean *semejantes*, es decir, que tengan el mismo índice y el mismo radicando.**

  Ejemplo:

  $$4.\sqrt{3}+2.\sqrt{3}-\sqrt{3}=5.\sqrt{3}$$

- **En algunos casos, cuando los radicales no son semejantes, podremos reducirlos mediante un procedimiento llamado *extracción de factores del radical*, que consiste en factorizar los radicandos, distribuir las raíces y simplificar.**

  Ejemplo:

  factorizamos los radicandos

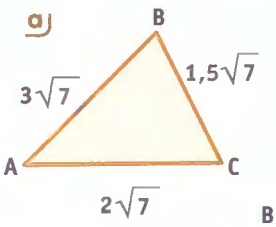
  $$\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{32}=\sqrt{3^2.2}+\sqrt{2^3}-\sqrt{2^5}=\sqrt{3^2.2}+\sqrt{2^2.2}-\sqrt{2^4.2}=$$

  $$=\sqrt{3^2}.\sqrt{2}+\sqrt{2^2}.\sqrt{2}-\sqrt{2^4}.\sqrt{2}=3.\sqrt{2}+2.\sqrt{2}-2^2.\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

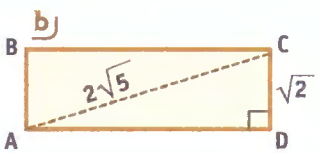
  aplicamos propiedad distributiva de la radicación

9 Hallen el perímetro de las siguientes figuras, cuyas medidas están en centímetros.

a)

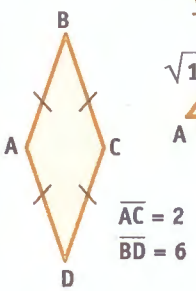


b)

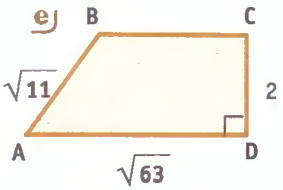


c)

d)



e)



10 Resuelvan los siguientes cálculos.

a) $\sqrt{6}-\frac{1}{3}\sqrt{6}+3\sqrt{6}=$

.....

.....

b) $2.\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{(-5)}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}=$

.....

.....

c) $\sqrt[4]{9}-3\sqrt[6]{27}-\frac{\sqrt{3}}{3}=$

.....

.....

d) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}-4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}=$

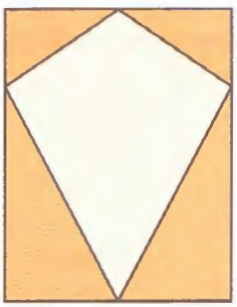
.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Multiplicación y división de radicales

11 La base del rectángulo mide $2\sqrt{3}$ cm y la altura $\sqrt{6}$ cm.



a) Calculen el área del rectángulo.

.....

b) Calculen el área del romboide.

.....

Para observar

- **Para multiplicar o dividir *radicales de igual índice*, utilizamos el siguiente procedimiento, basado en la propiedad distributiva:**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = 2$
- $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{48}{2}} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$

- **Para multiplicar o dividir *radicales de distinto índice*, se deben buscar radicales equivalentes de modo tal que todos tengan igual índice.**

Ejemplo: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

12 Resuelvan las siguientes operaciones y simplifiquen siempre que sea posible.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{8} =$

.....

.....

b) $\sqrt[3]{3} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{16} =$

.....

.....

c) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}} : \sqrt[4]{\frac{8}{3}} =$

.....

.....

13 Resuelvan las siguientes operaciones y simplifiquen cuando sea posible.

a) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)$

b) $\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{6}\right) : \left(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{6}\right)$

c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{9}$

d) $\left(\sqrt{80} - \sqrt{45}\right) \frac{1}{\sqrt{5}}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)^2$

f) $2 - \sqrt{3}\left[1 - \sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}\right)\right]$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Racionalización de denominadores

14 Utilicen la calculadora para obtener valores aproximados de las siguientes expresiones y unan con flechas las que sean equivalentes.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$
$\frac{3}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}$

Para observar

Racionalizar un denominador **significa transformar una expresión con denominador irracional en otra equivalente con denominador racional.**

En los siguientes ejemplos, pueden observar algunos recursos algebraicos útiles para racionalizar denominadores.

- $\frac{2.\sqrt{3}}{3.\sqrt{2}} = \frac{2.\sqrt{3}}{3.\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2.\sqrt{6}}{3.2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
- $\frac{4}{1-\sqrt{3}} = \frac{4}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{4.(1+\sqrt{3})}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4.(1+\sqrt{3})}{1-3} = \frac{4.(1+\sqrt{3})}{-2} = -2-2.\sqrt{3}$
- $\frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{3}$

En casos como el segundo, el cálculo se facilita recordando que: $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$.

15 Sin utilizar la calculadora, analicen si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $\sqrt{3}-1 = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

b) $\frac{6-\sqrt{12}}{2.\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$

c) $\frac{5.\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}} = \sqrt{6}-6$

d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7$

e) $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{2}} = -\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}$

f) $\frac{2}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{8}$

16 Racionalicen los denominadores de las siguientes expresiones y descubran cuáles representan números enteros.

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

b) $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{20}}$

c) $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{6}}{\sqrt{12}-\sqrt{54}}$

d) $\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{8}}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Racionalizaciones de numeradores y de denominadores

17 Sin usar calculadora, comprueben que $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Hagan lo mismo con $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ y luego traten de generalizar $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ si $a \neq 0$.

Para leer y recordar

Consideren una expresión con numerador o denominador irracional.

Racionalizar el numerador (o denominador) de dicha expresión significa transformarla en otra expresión equivalente con numerador (o denominador) racional. Para lograr esto, en algunas situaciones, se multiplica y divide por lo que se suele llamar el *conjugado*.

El conjugado de	es
$\sqrt{3} - 1$	$\sqrt{3} + 1$
$\sqrt{2} + \sqrt{5}$	$\sqrt{2} - \sqrt{5}$

18 En los siguientes ejemplos, se utilizaron distintos recursos algebraicos para racionalizar el numerador o denominador. Completen el cálculo y decidan si las operaciones efectuadas permitieron cumplir la consigna.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} =$

c) $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$

d) $\frac{\pi}{\sqrt{\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$

19 Racionalicen los denominadores.

a) $\frac{4x}{\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{x}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

d) $\frac{7}{\sqrt[7]{x^7}}$

20 Racionalicen los numeradores.

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{27} - \sqrt{8}}$

c) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

e) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$

21 Sin utilizar calculadora, analicen si la siguiente expresión es verdadera.

$$\frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}$$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ampliación del campo numérico

22 Marquen con una cruz todos los conjuntos numéricos a los cuales pertenecen las soluciones de las ecuaciones, cuando corresponda.

Ecuación	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$x - 3 = 1$					
$x + 2 = 1$					
$x \cdot 2 = 1$					
$x^2 - 2 = 0$					
$x^2 + 1 = 0$					

Para leer y recordar

Como sabemos, en $\mathbb{R}$ no podemos resolver raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-1}$, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1.

Se utiliza el símbolo i para indicar un número tal que $i^2 = -1$.

Teniendo en cuenta la igualdad a partir de la cual lo definimos, y que este número no es real, podemos usarlo para expresar las soluciones que no son reales de algunas ecuaciones.

Ejemplos:

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x_1 = \sqrt{-1} \quad x_2 = \sqrt{-1}$

$x_1 = i \quad x_2 = -i$

Comprobación:

$i^2 + 1 = 0$

$-1 + 1 = 0$ ✓

$(-i)^2 + 1 = 0$

$(-1)^2 \cdot i^2 + 1 = 0$

$-1 + 1 = 0$ ✓

$x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$

$x_1 = \sqrt{-2} \quad x_2 = \sqrt{-2}$

$x_1 = \sqrt{2}\, i \quad x_2 = -\sqrt{2}\, i$

Comprobación:

$(\sqrt{2}\, i)^2 + 2 = 0$

$2 \cdot i^2 + 2 = 0$

$2 \cdot (-1) + 2 = 0$ ✓

$(-\sqrt{2}\, i)^2 + 2 = 0$

$2 \cdot i^2 + 2 = 0$

$2 \cdot (-1) + 2 = 0$ ✓

23 Utilicen el símbolo i para expresar las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + 4 = 0$

.....

b) $-x^2 - 9 = 0$

.....

c) $x^2 + 5 = 0$

.....

d) $9x^2 + 16 = 0$

.....

e) $x^2 - 10 = 2x^2$

.....

f) $\dfrac{1}{x^2 + 1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{x^2 + \frac{2}{3}}$

.....

g) $(x + 5)^2 = 10x$

.....

h) $\dfrac{4}{x^2 + 4} - 1 = 1$

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los números complejos

Para leer y recordar

- A los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, los llamamos *números complejos*.

$z = a + bi$

Se suele utilizar la letra z para designar un número complejo.

i verifica que $i^2 = -1$.
i es la unidad imaginaria.

a se llama *parte real* de z.
Lo escribimos así:
$a = Re(z)$

b se llama *parte imaginaria* de z.
Lo escribimos así:
$b = Im(z)$

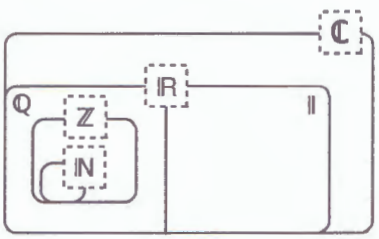
Ejemplos:

$z_1 = 2 - 3i$ → $Re(z_1) = 2$; $Im(z_1) = -3$

$z_2 = \frac{2}{3}i$ → $Re(z_2) = 0$; $Im(z_2) = \frac{2}{3}$

$z_3 = -5$ → $Re(z_3) = -5$; $Im(z_3) = 0$

- Al conjunto de todos los números complejos, lo designamos con el símbolo $\mathbb{C}$, y está definido de forma tal que incluye a los números reales, representados por aquellos números complejos cuya parte imaginaria es nula.
- Un número complejo no nulo como z_2, cuya parte real es nula, se llama *imaginario puro*.



24 Consideren la siguiente tabla.

a) Complétenla.

Número complejo z	Parte real $Re(z)$	Parte imaginaria $Im(z)$
$5 + 3i$		
	2	8
	-4	$\frac{2}{3}$
	1	-3
$2 - \sqrt{3}i$		
$5i$		
	0	4
	4	0
	0	0

b) Indiquen cuáles de los números complejos que aparecen en la tabla son:

I. reales.

.....

.....

.....

.....

II. imaginarios puros.

.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El conjugado y el opuesto de un número complejo

Para leer y recordar

A partir de un número complejo $z = a + bi$, se definen los siguientes números complejos:

- el *conjugado* de z es $\overline{z} = a - bi$ (la parte real es igual y la parte imaginaria es la opuesta).
- el *opuesto* de z es $-z = -a - bi$ (la parte real y la parte imaginaria son opuestas).

Ejemplos:

$z_1 = -1 - 2i$	$\overline{z_1} = -1 + 2i$	$-z_1 = 1 + 2i$
$z_2 = 4i$	$\overline{z_2} = -4i$	$-z_2 = -4i$
$z_3 = 6$	$\overline{z_3} = 6$	$-z_3 = -6$

25

a) Completen el cuadro.

z	$\overline{z}$	$-z$
$\frac{2}{3} + \frac{5}{2}i$		
	$2 - 6i$	
		$-7 + \sqrt{3}\,i$
	-3	
		$-\sqrt{5}\,i$
	$2 - \frac{1}{2}i$	

b) Analicen si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifiquen la respuesta.

I. Ningún número complejo es igual a su conjugado.

II. Ningún número complejo es igual a su opuesto.

26 Sea $z = a + bi$ un número complejo.

a) Escriban en un lenguaje simbólico:

I. La suma entre un número complejo y su conjugado es dos veces la parte real.

II. El producto entre un número complejo y su conjugado es igual al cuadrado de su módulo.

b) Verifiquen las propiedades anteriores para:

I. $z = 6 - i$

II. $z = 4i$

27 Encuentren un número complejo que cumpla en cada caso la siguiente condición:

a) $\overline{z} = -z$

b) $z + \overline{z} = -z$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Operaciones con números complejos

Para observar

En los siguientes ejemplos, pueden observar cómo realizamos las cuatro operaciones básicas con números complejos.

Consideremos $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 - 5i$.

- **Adición**

$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 5i) = (2 + 1) + (3 - 5)i = 3 - 2i$

- **Sustracción**

$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 - 5i) = (2 - 1) + (3 + 5)i = 1 + 8i$

- **Multiplicación**

$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (1 - 5i) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-5i) + 3i \cdot 1 + 3i \cdot (-5i) = 2 - 10i + 3i - 15\underbrace{i^2}_{-1} = 17 - 7i$

- **División**

Para resolver la división entre dos números complejos, siendo el divisor no nulo, multiplicamos ambos por el conjugado del divisor, del siguiente modo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(2 + 3i)}{(1 - 5i)} \cdot \frac{(1 + 5i)}{(1 + 5i)} = \frac{2 + 10i + 3i - 15}{1^2 - (5i)^2} = \frac{-13 + 13i}{26} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Observen que multiplicar por una fracción de igual numerador y denominador es como multiplicar por 1, por lo tanto, la igualdad no se altera.

28 Consideren los complejos $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 3 + 5i$ y $z_3 = 4 - i$ y resuelvan los siguientes cálculos.

a) $z_1 + z_2 - z_3$
b) $z_1 + \overline{z_2} - z_3$
c) $\overline{z_1} - \overline{z_3}$
d) $5z_3$
e) $(z_1 + z_2)\, z_3$
f) $(-z_1 + \overline{z_2}).(\overline{z_1} - z_3)$
g) $z_1 \cdot z_2 - z_3$
h) $(z_3)^2$
i) $z_1 \cdot \overline{z_1}$
j) $z_2 \cdot \overline{z_2}$

29 Consideren los complejos $z_1 = 3 - i$; $z_2 = -4i$ y $z_3 = 7 + 2i$ y resuelvan las siguientes divisiones.

a) $\frac{z_2}{z_1}$
b) $\frac{z_1}{z_3}$
c) $\frac{z_3}{z_2}$
d) $\frac{z_2}{z_3}$
e) $16 \cdot \frac{\overline{z_3}}{\overline{z_2}}$
f) $\frac{1}{z_1}$

30 Consideren la unidad imaginaria i.

a) Completen sus potencias.

$i^0 =$ ..... $i^2 =$ ..... $i^4 =$ ..... $i^6 =$ .....

$i^1 =$ ..... $i^3 =$ ..... $i^5 =$ ..... $i^7 =$ .....

b) Analicen los valores que obtuvieron y expliquen qué regularidad observan.

.....

31 Calculen las siguientes potencias.

a) $i^{127} =$ .....
b) $i^{44} =$ .....
c) $i^{242} =$ .....
d) $i^{69} =$ .....
e) $i^{94} =$ .....
f) $(i^{12})^4 =$ .....
g) $(i^3)^5 =$ .....
h) $(i^9)^{27} =$ .....
i) $i^{33} \cdot i^{11} =$ .....
j) $i^{2022} : i^3 =$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Forma binómica y forma polar de un número complejo

32 Utilicen el teorema de Pitágoras para calcular el módulo de $\vec{v} = (4; 3)$.

$|\vec{v}| =$ .....

33 Averigüen cuál de las siguientes medidas corresponde, aproximadamente, al ángulo que forma $\vec{v}$ con el eje x, si $\vec{v} = (4; 3)$.

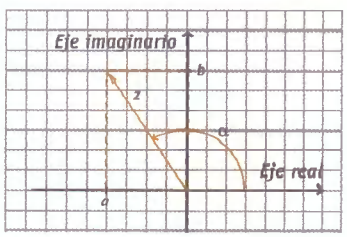
a) 143° 7' 48" b) 36° 52' 12" c) 53° 7' 48"

Para leer y recordar

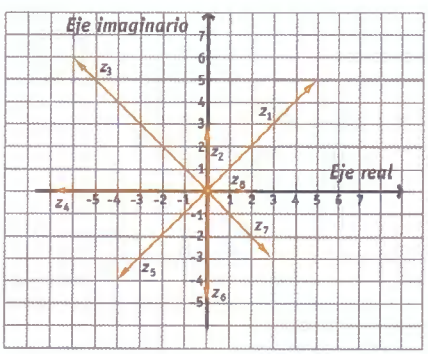
Un número complejo se puede escribir de distintas maneras.

$z = a + bi$ es un número complejo escrito en *forma binómica*.

$z = (|z|; \hat{\alpha})$ es un número complejo escrito en *forma polar*, siendo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\hat{\alpha}$ el ángulo que forma el vector que lo representa con el semieje positivo de las abscisas.



34 Indiquen, en forma binómica y en forma polar, los números complejos que están representados a la derecha, como en el ejemplo.



$z_1 = (5 + 5i) = (\sqrt{50}; 45°)$ $z_5 =$ .....

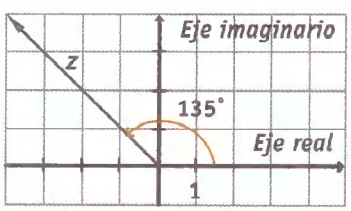
$z_2 =$ ..... $z_6 =$ .....

$z_3 =$ ..... $z_7 =$ .....

$z_4 =$ ..... $z_8 =$ .....

35 Las distintas formas de expresar números complejos se pueden verificar usando calculadora científica.

a) Escriban en forma binómica y en forma polar el número complejo que se observa representado geométricamente.

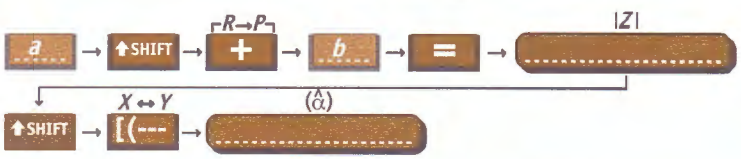


$z =$ ..... (forma binómica)

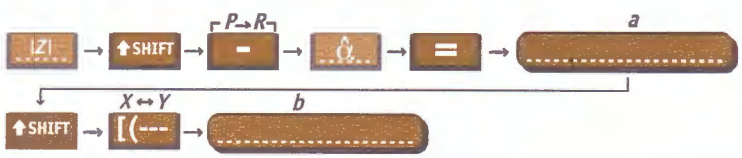
$z =$ ..... (forma polar)

b) Verifiquen estos resultados con la calculadora siguiendo las instrucciones.

De binómica a polar



De polar a binómica



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ecuaciones en $\mathbb{C}$

Para leer y recordar

Para resolver ecuaciones en el conjunto de los números complejos, se procede de forma similar que en el campo de los números reales, salvo en el caso de presentarse ecuaciones con módulo.

Ecuaciones cuadráticas en $\mathbb{C}$

Si z_1 y z_2 son números complejos y raíces o ceros de la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c$, con a, b y c números reales, entonces z_1 y z_2 son números complejos conjugados, es decir: $z_1 = p + qi$ y $z_2 = p - qi$.

Además se cumple que:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2p = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = p^2 + q^2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Ejemplo:

Para encontrar la ecuación cuadrática cuyas raíces complejas son:

$z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 2 - i$ se cumple que:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 + 2 = 4 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 + z_2 = 2^2 + 1^2 = 5 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Para $a = 1$ la ecuación es $z^2 - 4z + 5 = 0$.

36 Resuelvan las ecuaciones en $\mathbb{C}$ y representen gráficamente la solución.

a) $z + (3 + i)^2 - i^3 = 1 + 4i$

b) $-3z + 3(z + 1)^2 = 9i + 3z^2$

c) $(1 + i) \cdot \dfrac{(2 - z)}{i} = i^5 - 1$

d) $\dfrac{1}{2}z + 2(z - i) + \dfrac{1}{i} = -7i + \dfrac{3}{2}z$

37 Verifiquen que las siguientes ecuaciones tengan las mismas soluciones.

$z^2 + 2z + 2 = 0$ y $\left(z + \dfrac{2}{1 + i}\right) \cdot \left(z + \dfrac{2}{1 - i}\right) = 0$

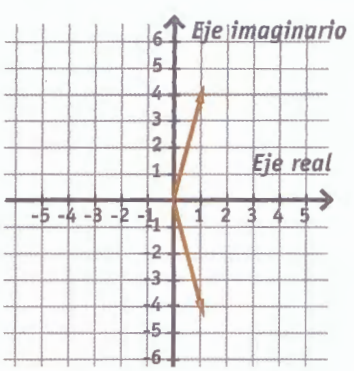
38 Hallen los números complejos que cumplan simultáneamente:

a) $\begin{cases} z + z^1 = 2 - i \\ -z + z^1 = 3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + 3z^1 = 4 - 2i \\ 2z - z^1 = 8 + 3i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2z - z^1 = z + 2i \\ z - z^1 = 8 \end{cases}$

39 Escriban la expresión polinómica que permita tener como solución los números complejos representados.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

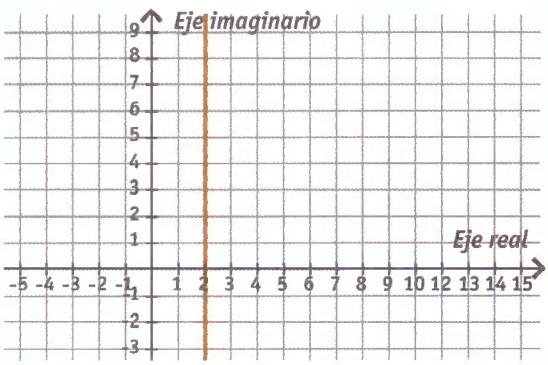
Representación gráfica en el conjunto de números complejos

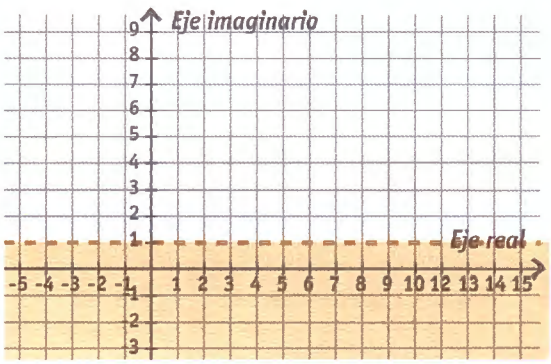
Para leer y recordar

Así como para representar cualquier número real se necesita un eje o una recta graduada, para representar cualquier número complejo se necesita un plano cartesiano, con dos ejes graduados.

Ejemplo:

La representación gráfica del conjunto definido por comprensión $A = \{z \in \mathbb{C} / Re(z) = 2\}$ y la de $B = \{z \in \mathbb{C} / Im(z) < 1\}$ son:





40 Representen los siguientes números complejos.

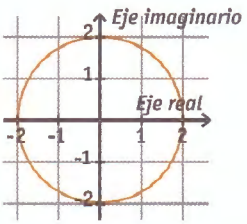
a) $D = \{z \in \mathbb{C} / Re(z) \leq 2 \wedge Imz < 1\}$

b) $E = \{z \in \mathbb{C} / Re(z) \geq 2 \wedge Imz \geq 11\}$

c) $F = \{z \in \mathbb{C} / |Re(z)| < 2\}$

d) $E = \{z \in \mathbb{C} / |Im(z)| \geq 1\}$

41 Teniendo en cuenta que el módulo de un número complejo $z = a + bi$ es igual a la longitud del vector que lo representa con origen en (0; 0) y extremo (a; b), la representación gráfica del conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ es:



Representen gráficamente:

a) $|z| = 3$

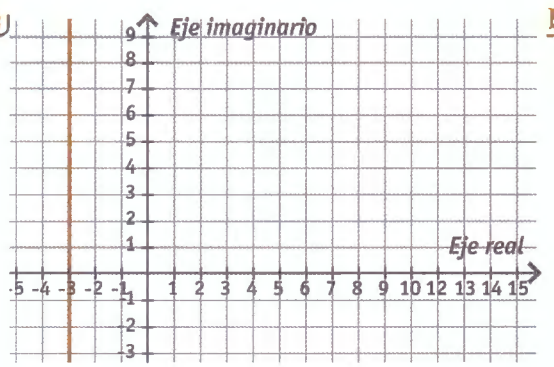
b) $|z| \leq 1$

c) $1 \leq |z| < 3$

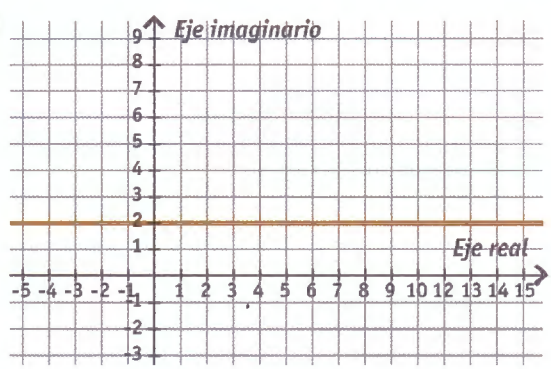
d) $|z| \geq 3$

42 Escriban por comprensión el conjunto de números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:

a)

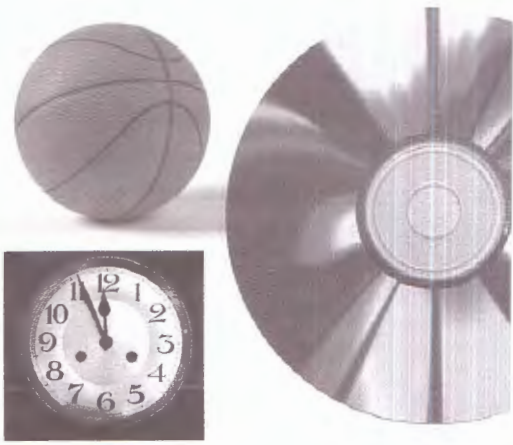


b)



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los números irracionales y el círculo



Si se rodea un círculo de cualquier tamaño con un hilo y luego se divide esta medida por la del diámetro, siempre se obtiene un número un poco mayor que 3. Esta relación se mantiene siempre, independientemente del círculo escogido.

Al número que expresa la razón entre la longitud de una circunferencia y la medida de su diámetro, se lo llamó π (esta letra griega es la equivalente a nuestra *p* y es la primera letra de la palabra griega *periphereia*, que significa 'circunferencia').

Los matemáticos de la Antigüedad creyeron que este número era racional y le buscaron una representación fraccionaria. Recién en el siglo XVIII, el matemático J. H. Lambert demostró que es irracional.

Seguramente, sin saber que es irracional, hayan utilizado muchas veces alguna aproximación de su valor en distintos cálculos relacionados con longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas que involucran circunferencias y círculos.

43 Un comerciante debe transportar objetos cilíndricos de vidrio, de 8 cm de diámetro y 6 cm de altura. Puede optar por dos tipos de cajas, como las descriptas en la tabla.

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Altura (cm)
Caja tipo A	40	32	9
Caja tipo B	56	22	10

a) Expresen en forma exacta:
   I. el volumen de uno de los cilindros.
   II. el área total de uno de los cilindros.

b) Redondeen a los centésimos las medidas que calcularon en a).

c) ¿Cuál es la cantidad máxima de cilindros que puede entrar en cada caja?

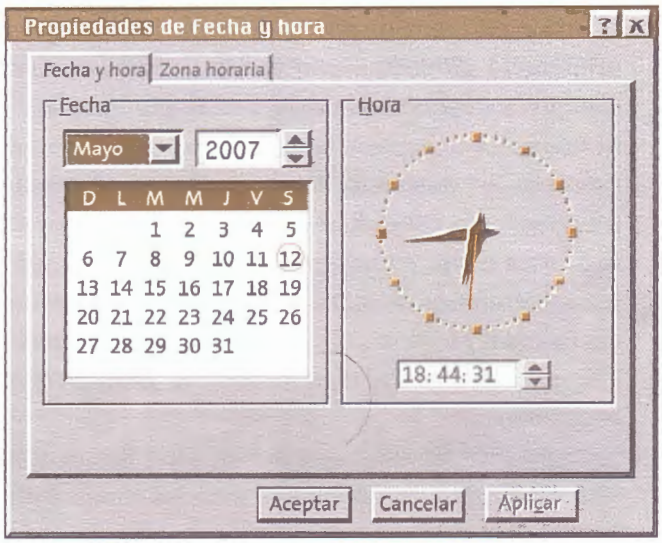
d) El volumen libre en cada caja se llena con un material especial que sirve para evitar o, eventualmente, amortiguar golpes. Expresen el volumen libre de cada caja:
   I. en forma exacta.
   II. en forma aproximada, redondeando a los milésimos.

e) ¿Cuál de las dos cajas elegirá el comerciante, si se deben cumplir dos requisitos: que entre el máximo de cilindros posible y que quede el mínimo de espacio libre?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los relojes y los números complejos

Entre los relojes digitales y los de agujas, hay gente que no sabe con cual quedarse. Para ellos existen los relojes digitales que marcan la hora con agujas. Estos tienen la ventaja de que no tienen ningún tipo de mecanismo (engranajes, etcétera), pero conservan el estilo tradicional de las agujas que a tanta gente le gusta.



44 Un estudiante de análisis de sistemas quería saber cómo hacen las computadoras que muestran un reloj de agujas en la pantalla. Investigando, se dio cuenta de que el reloj podía ser representado en el plano cartesiano y que la posición del minutero en cada instante era un número complejo. Por ejemplo, suponiendo que la aguja mide 1 (es decir que el módulo del número es 1), 0 minutos es el número i, 15 minutos es el número 1, 30 minutos es el número $-i$, etcétera.

¿Qué números complejos representa la aguja minutera en los minutos 45 y 60? ¿Y en 52 y medio?

45 Después observó que podía lograr pasar de una posición a otra multiplicando por un número complejo adecuado. Por ejemplo, si la aguja estuviera en la posición 0 minutos (es decir, el número i), al multiplicarlo por $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, pasaría a la posición 7 minutos y medio.

a) ¿Es esto correcto?

b) ¿Por qué número debería multiplicar para pasar de 5 minutos a 15 minutos?

c) ¿Cuál es el número por el que tendría que multiplicar para avanzar 45 minutos?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

46 Resuelvan y escriban la solución en el conjunto de los números reales.

a) $|x + 10| - 1 = 0$

b) $(x - 6) \cdot (x - 6) = 0$

c) $(x - 6) \cdot (x - 6) = 4$

d) $(3x + 1)^2 = -1$

e) $(2x + 5)^2 - 16 = 20x + 25$

f) $5x - (49 + 8x) = -x \cdot (x + 3)$

47 Resuelvan y escriban el conjunto solución en el conjunto de los números reales.

a) $|3x + 4| < 25$

b) $|x + 7| \geq 36$

c) $-|-1 + x| \geq -1$

d) $|-x + 1| < -1$

e) $\sqrt{(-2x + 3)^2} \leq 4$

f) $|x - 35| > -35$

48 En la expresión $\frac{\pi^2 - 1}{2\pi + 2}$ racionalicen:

a) el denominador.

b) el numerador.

49 Resuelvan y escriban el conjunto solución en el conjunto de los números reales.

a) $\sqrt{27}\,x + \sqrt{12}\,x + \sqrt{3} = 1$

b) $\frac{x}{\sqrt{2} - 1} + \sqrt{8}\,x = \sqrt{18}$

c) $\sqrt[3]{2}\,x - \sqrt[3]{5}\,x = 2^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}$

d) $|\sqrt{125} - \sqrt{48}\,x| = \sqrt{20}$

50 Resuelvan la ecuación:

$|x - 1| \cdot (x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) = 0$

a) en $\mathbb{Q}$ c) en $\mathbb{I}$

b) en $\mathbb{R}$ d) en $\mathbb{C}$

51 Encuentren el inverso de los siguientes números complejos y represéntenlos gráficamente en un mismo sistema de ejes.

a) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

b) $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

c) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

52 Resuelvan las siguientes ecuaciones en C.

a) $z + (3 - i)^2 = \overline{1 - 2i}$

b) $2z - i + \overline{3 - i} = 0$

c) $(1 - i)^2 + (2 - z)i = 3$

d) $\frac{z}{1 - i} + 2i = 1$

53 Escriban un número complejo en cada caso que cumpla las condiciones indicadas.

a) $Re\,(z) > 2$ y $Im\,(z) = 3$

b) $Re\,(z) < Im\,(z)$ y $Im\,(z) < 0$

c) $Re\,(z) + Im\,(z) = 8$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

54 Escriban, si es posible,

a) un número complejo que sea igual a su conjugado.

b) un número complejo que sea igual a su opuesto.

c) un número complejo que sea igual a su inverso.

55 Resuelvan las siguientes operaciones con números complejos.

a) $\frac{3 + i^3}{1 + i^5}$

b) $(i^8 - 2i^9) + (1 + 2i^7) - (9 + 4i^{11})$

c) $\frac{(3 + 2i^5) - (3 + i^{27})}{-2 - 3i}$

56 Averigüen el número complejo z para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $\frac{3 + i}{z - 2} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

b) $\frac{z + i}{z - 2} = 2i$

57 Siendo $z = \frac{3k - ki}{1 - 3i}$, hallen k para que $|z| = 10$.

58 Escriban en forma polar los siguientes números complejos presentados en forma binómica.

a) $z = 1 + i$

b) $z = 1 - i$

c) $z = 5i$

d) $z = -4 + 4i$

e) $z = -10$

f) $z = -4i$

g) $z = -2 + 2i$

h) $z = 2$

59 Hallen la forma binómica de los siguientes números complejos:

a) $z = (\sqrt{8}\ ; 45°)$

b) $z = (\sqrt{18}; 135°)$

c) $z = (\sqrt{32}; 225°)$

d) $z = (1; 270°)$

60 Investiguen qué relación debe haber entre los coeficientes a y b de una ecuación de la forma $ax^2 + b = 0$, para que no tenga soluciones en $\mathbb{R}$.

61 Usen la calculadora para escribir la forma polar de los siguientes números complejos.

a) $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

b) $z = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

c) $z = -2 - 2i$

d) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

62 Usen la calculadora para escribir la forma binómica de los siguientes números.

a) $z = (5; 120°)$

b) $z = (2; 330°)$

c) $z = (1; 135°)$

d) $z = (10; 30°)$

63 Encuentren los valores de p y q para que se cumplan las siguientes igualdades.

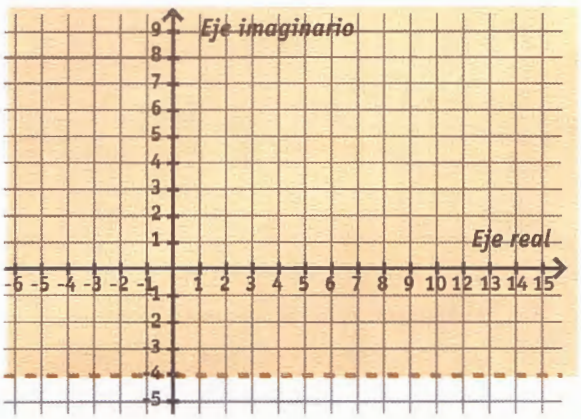
a) $(6 + pi).(1 - 4i) = 11q - 20i$

b) $\frac{2p - 10i}{3 + i} = 8 - qi$

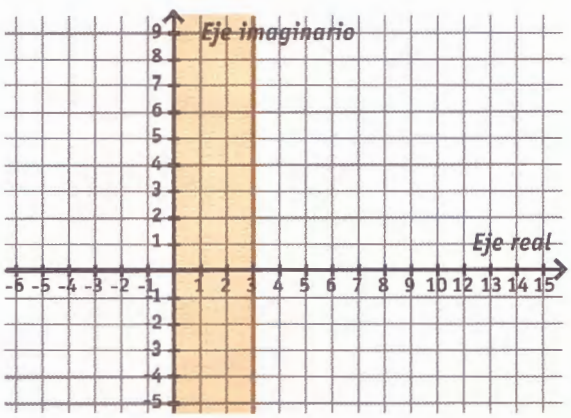
© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

64 Escriban por comprensión el conjunto de números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:

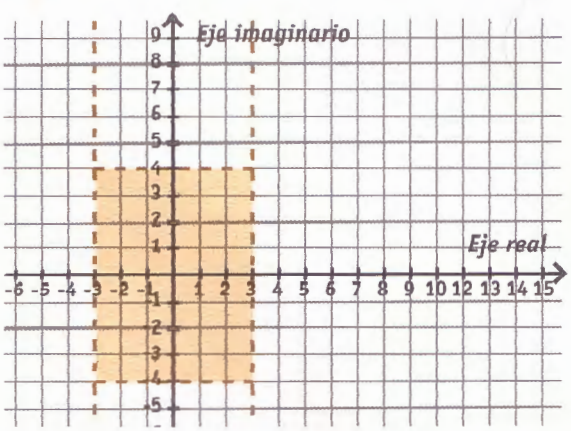
a)



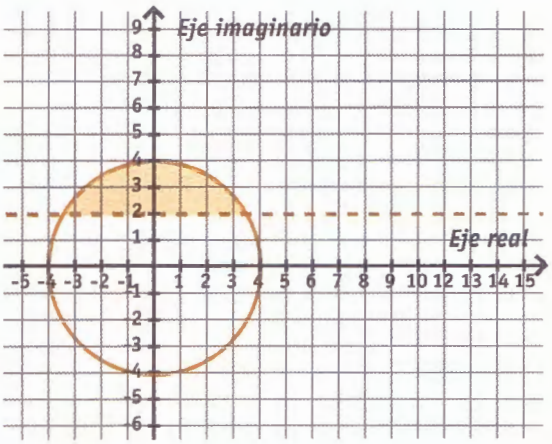
b)



c)



d)



65 Hallen la forma binómica del inverso de los siguientes números complejos y represéntenlos gráficamente en un mismo sistema de ejes.

a) $(2; 60°)$

b) $(2; 120°)$

c) $(2; 240°)$

d) $(2; 300°)$

66 Hallen dos números complejos conjugados tales que la suma sea 6 y la diferencia $4i$.

67 Escriban la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$, ≡ siendo b y c números reales, y sabiendo que una de las raíces es:

a) $6 + i$

b) $-i$

c) $6 - i$

d) $(\sqrt{12}; 45°)$

68 Representen gráficamente los siguientes conjuntos de números complejos.

a) $A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 3 \wedge Re(z) < 1\}$

b) $A = \{z \in \mathbb{C} / |z| > 1 \wedge |Im(z)| < 2\}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 Gráficamente, un número complejo y su conjugado son siempre:

- a) simétricos con respecto al eje de las ordenadas.
- b) simétricos con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.
- c) simétricos con respecto al eje de las abscisas.
- d) simétricos respecto del origen de coordenadas.

2 Para todo a y b perteneciente al conjunto de números reales, se cumple que :

- a) $|a + b| = |a| + |b|$
- b) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- c) $|a + b| > |a| + |b|$
- d) $|a + b| = |a| - |b|$

3 El sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{32} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{12} \end{cases}$ tiene como solución:

- a) $x = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad y = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{6}$
- b) $x = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad y = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{6}$
- c) $x = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\quad y = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
- d) $x = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2}$ $\quad y = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{3}$

4 Los números complejos $z_1 = -6 + 6i$ y $z_2 = (6\sqrt{2}\,; 315°)$:

- a) son iguales.
- b) son conjugados.
- c) son opuestos.
- d) tienen distinto módulo.

5 Si $\frac{a^{-5} \cdot \frac{3}{a^4} : \sqrt[5]{a^2}}{27 \cdot a^{-\frac{33}{5}}} = 27^{-1}$, entonces:

- a) $|a| = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- b) $|a| = \sqrt{3}$
- c) $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- d) $a = -\sqrt{3}$

6 Un hexágono regular tiene 2 cm de lado. La distancia que hay desde el centro de esta figura hasta uno de sus lados es la misma que:

- a) la medida de la hipotenusa de un cuadrado de 3 cm de lado.
- b) la medida de la hipotenusa de un cuadrado de 2 cm de lado.
- c) la medida de la altura de un triángulo equilátero de 2 cm de lado.
- d) la medida de la altura de un triángulo equilátero de 3 cm de lado.

7 Las soluciones de la ecuación $x^4 - 9 = 0$ son:

- a) $x_1 = -3$; $x_2 = 3$; $x_3 = 3i$; $x_4 = -3i$
- b) $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$
- c) $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = \sqrt{3}i$
- d) $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{3}i$; $x_3 = \sqrt{3}i$; $x_4 = -\sqrt{3}i$

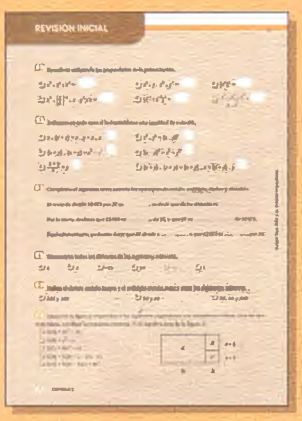
8 El opuesto del conjugado de $3 + 2i$ es:

- a) $-3 - 2i$
- b) $3 + 2i$
- c) $-3 + 2i$
- d) $3 - 2i$

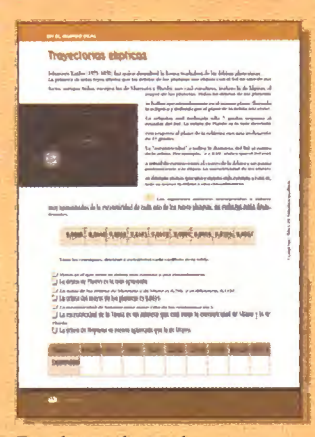
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

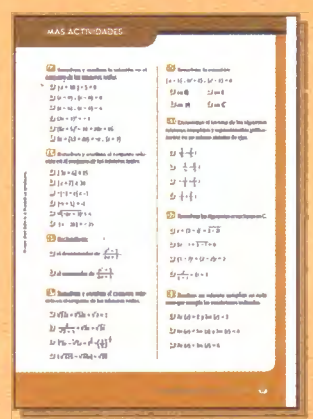
Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.



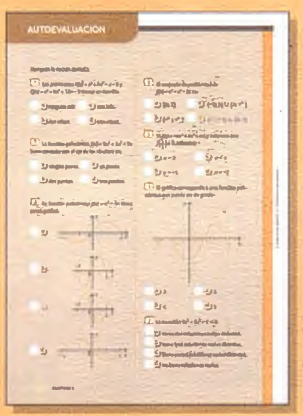
Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.



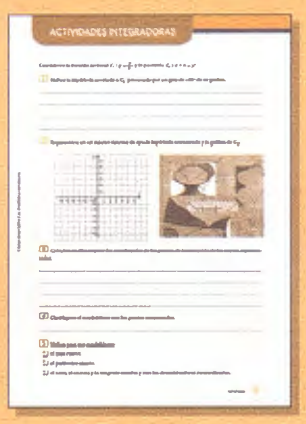
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



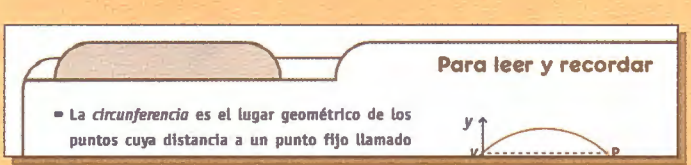
Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



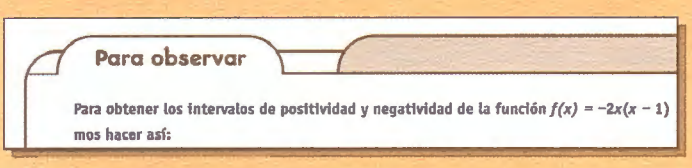
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 3 y 5, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE